

Zweitorne



- 4 Variablen
- verschiedene Beschreibungsformen, die stets 2 Operatoren in Abhängigkeit von 2 anderen Variablen beschreiben

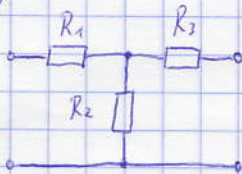
1. Z-Parameter

$$\begin{aligned} U_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ U_2 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{aligned}$$

Parameter $Z_{11} = U_1 / I_1 |_{I_2=0}$
 $Z_{12} = U_1 / I_2 |_{I_1=0}$

$Z_{21} = U_2 / I_1 |_{I_2=0}$
 $Z_{22} = U_2 / I_2 |_{I_1=0}$

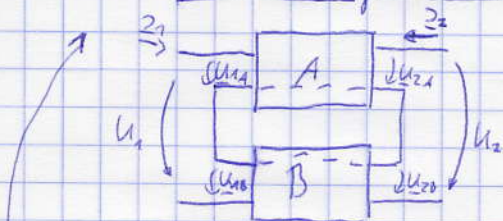
Beispiel
1)



$$\begin{aligned} Z_{11} &= R_1 + R_2 \\ Z_{12} &= R_2 \\ Z_{21} &= R_2 \\ Z_{22} &= R_2 + R_3 \end{aligned}$$

Ersetzkaltung für passive Zweitorne

Reihenschaltung von Zweitorne



$$\begin{aligned} U_1 &= U_{1A} + U_{1B} = (Z_{11A} + Z_{11B}) I_1 + (Z_{12A} + Z_{12B}) I_2 \\ U_2 &= U_{2A} + U_{2B} = (Z_{21A} + Z_{21B}) I_1 + (Z_{22A} + Z_{22B}) I_2 \end{aligned}$$

→ Ersatzkaltor $(Z) = (Z_A) + (Z_B)$

Bei Reihenschaltung von Zweitorne addieren sich die Z-Parameter

Summierung paarweise Gleiches der Klemmenanschlüsse

Umkehrbarkeit und Symmetrie

Umkehrbarkeit

Umkehrbarkeit eines Zweitors: Vertauscht man Eingangs- und Ausgangsklemmenpaar gegenseitig, bleibt das Transferverhalten unverändert (U_1 / I_2 bzw. U_2 / I_1)

Zweitor ist umkehrbar, wenn $Z_{12} = Z_{21}$

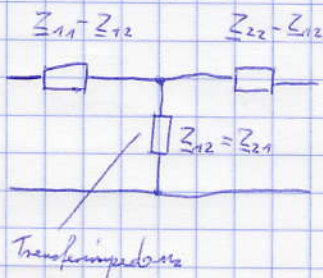
Symmetrie

Zweitor ist symmetrisch, wenn bei Vertauschen von Eingangs- und Ausgangsklemmenpaar sich weder Transferverhalten noch Eingangs- und Ausgangsimpedanz ändern.

symmetrisches Zweitor: $Z_{12} = Z_{21}$ und $Z_{11} = Z_{22}$

- symmetrische Zweitorne sind stets umkehrbar
- umkehrbare Zweitorne sind nicht unbedingt symmetrisch
- passive Zweitorne sind stets umkehrbar (ohne Beweis)

T-Ersatzschaltung (für unidirektionale Zweipole)



Y-Beschreibung

$$\underline{z}_1 = Y_{11} U_1 + Y_{12} U_2$$

$$\underline{z}_2 = Y_{21} U_1 + Y_{22} U_2$$

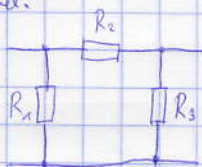
$$Y_{11} = \underline{z}_1 / U_1 |_{U_2=0}$$

$$Y_{12} = \underline{z}_1 / U_2 |_{U_1=0}$$

$$Y_{21} = \underline{z}_2 / U_1 |_{U_2=0}$$

$$Y_{22} = \underline{z}_2 / U_2 |_{U_1=0}$$

Beispiel:



$$Y_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$Y_{12} = \frac{1}{R_2}$$

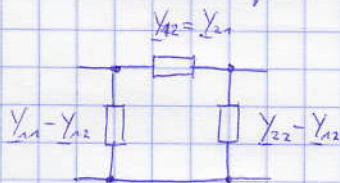
$$Y_{21} = \frac{1}{R_2}$$

$$Y_{22} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2}$$

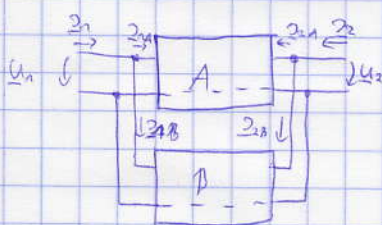
Umkehrbarkeit: $Y_{12} = Y_{21}$

Symmetrie: $Y_{12} = Y_{21}$, $Y_{11} = Y_{22}$

T-Ersatzschaltung (unidirektionale Zweipole)



Parallelschaltung von Zweipolen



Einbindung: jeweils gleiche Klemmenströme

$$\underline{z}_1 = \underline{z}_{1A} + \underline{z}_{1B} = (Y_{11A} + Y_{11B}) U_1 + (Y_{12A} + Y_{12B}) U_2$$

$$\underline{z}_2 = \underline{z}_{2A} + \underline{z}_{2B} = (Y_{21A} + Y_{21B}) U_1 + (Y_{22A} + Y_{22B}) U_2$$

$$\rightarrow (Y) = (Y_A) + (Y_B)$$

H-Beschreibung

$$U_1 = H_{11} \underline{z}_1 + H_{12} U_2$$

$$\underline{z}_2 = H_{21} \underline{z}_1 + H_{22} U_2$$

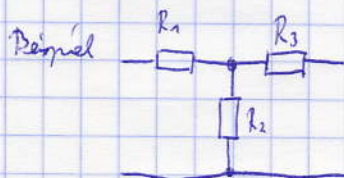
$$H_{11} = U_1 / \underline{z}_1 |_{U_2=0}$$

$$H_{12} = U_1 / U_2 |_{\underline{z}_1=0}$$

$$H_{21} = \underline{z}_2 / \underline{z}_1 |_{U_2=0}$$

$$H_{22} = \underline{z}_2 / U_2 |_{\underline{z}_1=0}$$

→ Stromverstärker-Beschreibung



$$H_{11} = R_1 + R_2 \parallel R_3$$

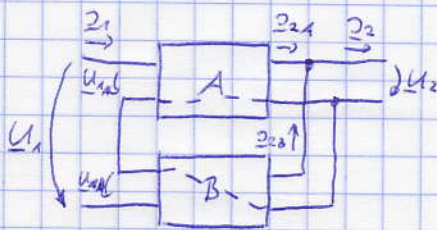
$$H_{12} = \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

$$H_{21} = \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

$$H_{22} = \frac{1}{R_2 + R_3}$$

H_{11} : Eingangsleitwert
 H_{12} : Rückwirkung
 H_{21} : Stromverstärkung
 H_{22} : Ausgangsleitwert

Reihen-Parallelhaltung von Zweiforen



Voraussetzung: paarweise gleiche Klemmensterne

$$U_1 = U_{1A} + U_{1B} = (H_{11A} + H_{11B}) I_1 + (H_{12A} + H_{12B}) U_2$$

$$I_2 = I_{2A} + I_{2B} = (H_{21A} + H_{21B}) I_1 + (H_{22A} + H_{22B}) U_2$$

$$(\underline{H}) = (\underline{H}_A) + (\underline{H}_B)$$

Bei Reihen-Parallelhaltung von Zweiforen addieren sich die Hybridparameter.

Zweiseitige Hybridbeschreibung

$$I_1 U_2 = H'_{11} U_1 + H'_{12} I_2$$

$$U_2 I_1 = H'_{21} U_1 + H'_{22} I_2$$

$$H'_{11} = \frac{I_1}{U_1} \Big|_{I_2=0}$$

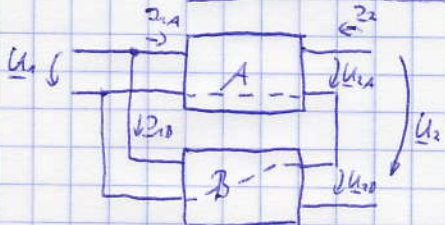
$$H'_{12} = \frac{I_1}{I_2} \Big|_{U_1=0}$$

$$H'_{21} = \frac{U_2}{U_1} \Big|_{I_2=0}$$

$$H'_{22} = \frac{U_2}{I_2} \Big|_{U_1=0}$$

~~Spannung~~ Leerlaufspannungsvorstärkung
~~Widerstand~~ Ausgangswiderstand
~~Wert~~ Eingangswert
~~Rückwirkung~~ Rückwirkung

Parallel-Reihenschaltung von Zweiforen



$$U_2 = U_{2A} + U_{2B} = (H'_{11A} + H'_{11B}) U_1 + (H'_{12A} + H'_{12B}) I_2$$

$$I_1 = I_{1A} + I_{1B} =$$

Bei Parallel-Reihenschaltung von Zweiforen addieren sich die inversen Hybridparameter.

Behandlung mit Kettenparametern

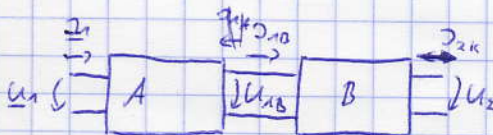
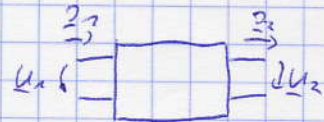
$$\begin{aligned} U_1 &= A_{11} U_2 + A_{12} I_2 \\ I_1 &= A_{21} U_2 + A_{22} I_2 \end{aligned}$$

$$A_{11} = \frac{U_1}{U_2} \Big|_{I_2=0}$$

$$A_{12} = -\frac{U_1}{I_2} \Big|_{U_2=0}$$

$$A_{21} = \frac{I_1}{U_2} \Big|_{I_2=0}$$

$$A_{22} = -\frac{I_1}{I_2} \Big|_{U_2=0}$$



$$\begin{pmatrix} U_{1A} \\ I_{1A} \end{pmatrix} = \underline{A}_B \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \underline{A}_A \begin{pmatrix} U_{1B} \\ I_{1B} \end{pmatrix} = \underline{A}_A \cdot \underline{A}_B \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{A} = \underline{A}_A \cdot \underline{A}_B$$

Bei Kettenhaltung von Zweiforen multiplizieren sich die Kettenparameter.

Ersatzschaltungen für die Zweitorbeschreibungen

Impedanzmatrix

$$U_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$

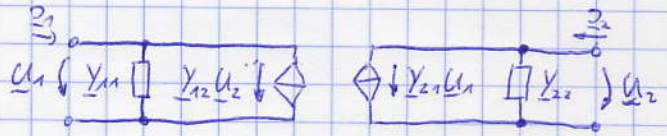
$$U_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2$$



Admittanzmatrix

$$I_1 = Y_{11} U_1 + Y_{12} U_2$$

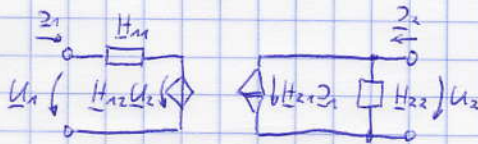
$$I_2 = Y_{21} U_1 + Y_{22} U_2$$



Hybridmatrix

$$U_1 = H_{11} I_1 + H_{12} U_2$$

$$I_2 = H_{21} I_1 + H_{22} U_2$$



Inverse Hybridmatrix

$$I_1 = H'_{11} U_1 + H'_{12} I_2$$

$$U_2 = H'_{21} U_1 + H'_{22} I_2$$



Umrechnung von Zweitorparametern

Beispiel: gegeben: beliebiger Satz Zweitorparameter

gesucht: $Z_{11} = U_1 / I_1 |_{I_2=0}$

a) aus (Y)

$$I_1 = Y_{11} U_1 + Y_{12} U_2$$

$$I_2 = Y_{21} U_1 + Y_{22} U_2 \equiv 0 \rightarrow U_2 = -U_1 \cdot Y_{21} / Y_{22}$$

$$I_1 = U_1 \left(Y_{11} - Y_{12} \cdot \frac{Y_{21}}{Y_{22}} \right) \rightarrow Z_{11} = \frac{Y_{22}}{Y_{11} Y_{22} - Y_{12} Y_{21}}$$

b) aus (H)

$$U_1 = H_{11} I_1 + H_{12} U_2$$

$$I_2 = H_{21} I_1 + H_{22} U_2 \equiv 0 \rightarrow U_2 = -I_1 \cdot H_{21} / H_{22}$$

$$U_1 = I_1 \left(H_{11} - \frac{H_{12} H_{21}}{H_{22}} \right) \rightarrow Z_{11} = \frac{H_{11} H_{22} - H_{12} H_{21}}{H_{22}}$$

c) aus (H')

$$I_1 = H'_{11} U_1 + H'_{12} I_2$$

$$\rightarrow Z_{11} = 1 / H'_{11}$$

$$U_2 = H'_{21} U_1 + H'_{22} I_2$$

d) aus (A)

$$U_1 = A_{11} U_2 - A_{12} I_2$$

$$I_2 = 0 \rightarrow U_2 = I_1 / A_{21}$$

$$I_1 = A_{21} U_2 - A_{22} I_2$$

$$U_1 = I_1 A_{11} / A_{21}$$

$$\rightarrow Z_{11} = A_{11} / A_{21}$$